

cou. A casa nostra es va fer també una celebració del centenari de Kolmogorov a la Sisena Trobada Matemàtica. A les referències que hi ha al final d'aquesta breu nota biogràfica trobareu més informació sobre aquesta figura universal de la matemàtica del segle XX. Que ho aprofiteu!

Referències

- [1] *Kolmogorov in perspective. History of Mathematics*, 20. Providence, RI, American Mathematical Society; Londres: London Mathematical Society, 2000.
- [2] A. N. SHIYAREV (ed). *Selected works of A. N. Kolmogorov* (tres volums), Mathematics and its Applications (Soviet Series), 27. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers Group, 1993.
- [3] <http://www.kolmogorov.com/> (Kolmogorov centennial site)

Oriol Serra
UPC

Estudi mecànic de la falsa cúpula

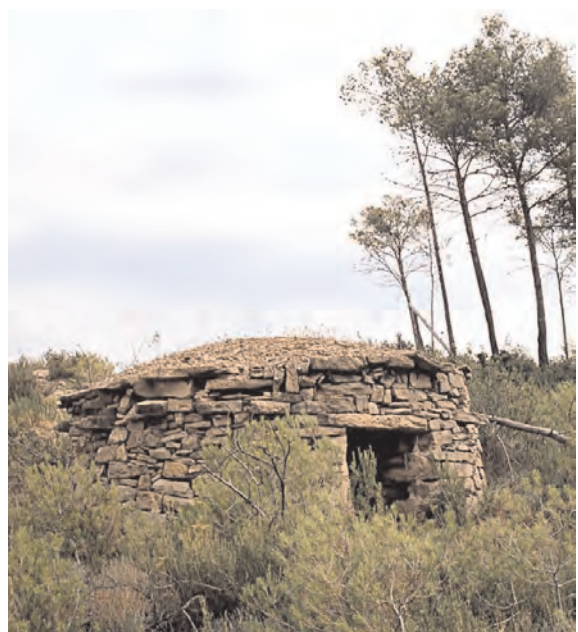
Resum

En aquest article es presenta l'anàlisi mecànica de l'anomenada falsa cúpula. Cada fila treballa com una palanca de primer gènere on el fulcre és el punt en què la fila sobresurt de la fila que hi ha immediatament a sota. La llei que s'aplica és la llei de la palanca. Aquest mètode de cobrir l'espai fou usat des de la prehistòria i, després d'un llarg parèntesi, el trobem en la construcció de les barraques de pedra seca en l'àrea mediterrània, al llarg del segle XVIII, XIX i XX.

Introducció

En extenses àrees rurals catalanes —i de fet en tots els països de la Mediterrània— són visibles construccions rústiques en pedra seca que reben diferents noms, però que a Catalunya es coneixen com a barraques de pastor en les àrees pirinenques —com el Ripollès— o barraques de vinya en comarques de forta tradició vitícola —com el Bages.

En la gran majoria d'aquestes construccions predomina la tècnica de la falsa cúpula per fer la coberta. Aquesta és una tècnica que fou usada en el Neolític per cobrir els sepulcres de tipus *tholos*, com és el cas de la necròpoli de Los Millares, i també es va usar amb èxit en grans monuments de la cultura micènica. Ja en temps històrics, aquesta tècnica constructiva sembla caure en l'oblit, amb algunes excepcions —com pot ser la construcció de certes cúpules de torres medievals, on convenia deixar una obertura en el centre de la cúpula—, fins que a partir del segle XVIII torna a sorgir amb força, no en els habitatges domèstics, sinó en els refugis temporals de pastors i pagesos.



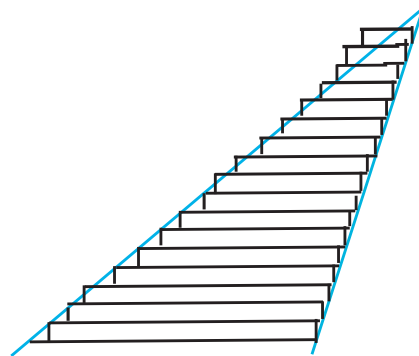
La tècnica de la falsa cúpula és aparentment simple. Es van fent filades circulars de lloses, de manera que cadascuna *vola* una mica respecte a la inferior. D'aquesta forma l'espai es va tancant en successives filades, cada vegada de radi més petit, fins que es tanca totalment el recinte. La clau de l'estabilitat d'aquesta estructura són els contrapesos que impedeixen que la càrrega sobre la volada d'una filada arribi a bolcar-la. Els barracaires sabien molt bé quin era la volada que podien fer en cada filada perquè tot plegat no s'esfondrés. Era un ofici passat per tradició de pares a fills. En les barraques parcialment esfondrades es pot apreciar bastant bé aquesta tècnica constructiva. En les següents línies presentem una anàlisi teòrica sobre l'estabilitat d'aquestes construccions.



Anàlisi teòrica de la falsa cúpula

Suposem una regió plana D , limitada per la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = b$ i $x = c$. Suposem que la seva densitat és constant (igual a 1). Llavors el moment estàtic de D respecte a un eix perpendicular al pla XY que passi per $x = a$, és:

$$M = \int_b^c f(x)|x - a| dx$$



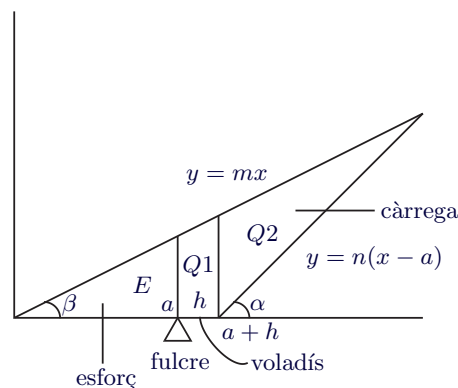
La palanca de 1r gènere és una màquina formada per una vara rígida que recolza sobre un punt anomenat *fulcre*. El fulcre parteix la vara en dues parts. A l'una s'hi aplica la càrrega (Q) que cal alçar i a l'altra l'esforç (E) que cal fer per alçar-la. En la seva versió més simple, la llei de la palanca diu que la càrrega i l'esforç estan en equilibri quan $Ql_1 = El_2$, on l_1 i l_2 són els respectius braços de la palanca. En el seu enunciat més general, la llei de la palanca estableix que:

Si M_1 és el moment estàtic de la regió D_1 situada a una banda del fulcre, i M_2 és el moment estàtic de la regió D_2 situada a l'altra banda, l'equilibri s'aconsegueix quan $M_1 = M_2$.

Si D_1 és l'esforç i D_2 és la càrrega, podem alçar la càrrega sempre que $M_1 > M_2$.

En el nostre cas, el **moment de l'esforç** és:

$$\begin{aligned} M_E &= \int_0^a mx(a-x) dx = m \int_0^a (ax - x^2) dx = \\ &= m \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = m \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 \right) = \\ &= \frac{1}{6}ma^3. \end{aligned}$$



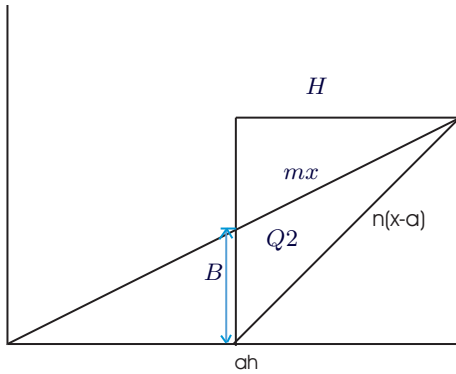
La càrrega (Q) es pot dividir en dues parts. La càrrega Q_1 en la vertical de la volada i la

càrrega Q2 desplomada. El moment de Q1 és:

$$\begin{aligned}
 M_{Q1} &= \int_a^{a+h} mx(x-a) dx = \\
 &= m \int_a^{a+h} (x^2 - ax) dx = \\
 &= m \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^{a+h} = \\
 &= m \left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}h^3 + a^2h + ah^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}ah^2 - a^2h - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3 \right) = \\
 &= m \left(\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}ah^2 \right)
 \end{aligned}$$

El moment de Q2, suposant que tota la càrrega actua sobre el punt $a+h$, és:

$$\text{Àrea}(Q2) = \frac{1}{2}B \cdot H = \frac{1}{2}m(a+h) \cdot H.$$



Ara, les dues rectes mx i $n(x-a)$ es tallen al punt

$$x = \frac{an}{n-m}$$

i, per tant, l'altura H és:

$$H = \frac{an}{n-m} - a - h = \frac{am}{n-m} - h.$$

El moment de Q2 és:

$$\begin{aligned}
 M_{Q2} &= h \cdot \text{Àrea}(Q2) = \\
 &= \frac{1}{2}mh(a+h) \left(\frac{am}{n-m} - h \right).
 \end{aligned}$$

Per tant el moment de la càrrega és:

$$\begin{aligned}
 M_Q &= M_{Q1} + M_{Q2} = \\
 &= m \left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}ah^2 + \frac{ma^2h}{2(n-m)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}ah^2 + \frac{mah^2}{2(n-m)} - \frac{1}{2}h^3 \right] = \\
 &= m \left(\frac{ma^2h + mah^2}{2(n-m)} - \frac{1}{6}h^3 \right).
 \end{aligned}$$

Per tenir equilibri trobem que:

$$M_e \geq M_Q$$

$$\frac{1}{6}ma^3 \geq m \left(\frac{ma^2h + mah^2}{2(n-m)} - \frac{1}{6}h^3 \right)$$

$$a^3 \geq \frac{3ma^2h + 3mah^2}{n-m} - h^3$$

$$\frac{3m\frac{h}{a} + 3m\left(\frac{h}{a}\right)^2}{n-m} - \left(\frac{h}{a}\right)^3 \leq 1. \quad (1)$$

Ara, ja que $h \ll a$, resulta $\frac{h}{a} \ll 1$ i $\left(\frac{h}{a}\right) \approx 0$ i $\left(\frac{h}{a}\right)^3 \approx 0$. Notem també que si $l = a+h$, llavors $h < \frac{1}{2}l$. En definitiva, l'expressió (1) ens queda:

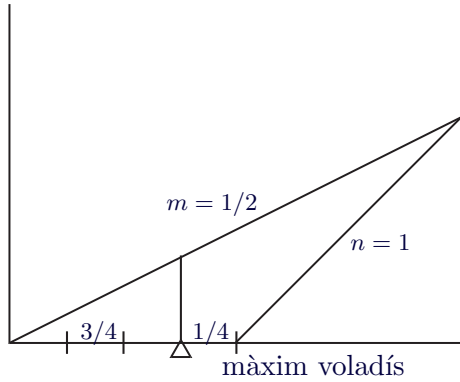
$$\begin{aligned}
 \frac{3m\frac{h}{a}}{n-m} \leq 1 \quad \text{i aïllant } h \text{ tenim} \\
 h \leq \frac{1}{3}a \left(\frac{n}{m} - a \right).
 \end{aligned}$$

Si a $l = a+h$ li diem *longitud de la llosa*, a w *gruix de la paret*, a $\mu = \frac{m}{n}$ la *lleugeresa de la cúpula* i a $\lambda = \frac{1}{\mu}$ la *pesantor*, llavors obtenim:

$$\begin{aligned}
 3h &\leq (l-h)(\lambda-1); \\
 (\lambda-1+3)h &\leq l(\lambda-1); \\
 h &\leq l \frac{\lambda-1}{\lambda+2} = l \frac{1-\mu}{1+2\mu}.
 \end{aligned}$$

Notem que com que $h < \frac{1}{2}l$ obtenim $l \frac{\lambda-1}{\lambda+2} < l \frac{1}{2}$ i per tant $\lambda < 4$. També notem que $0 \leq \mu \leq 1$ i que de fet $\frac{1}{4} \leq \mu \leq 1$. Com més proper a 1 és el valor de μ més lleugera és la construcció (les parets són més primes) i com més propera és μ a $\frac{1}{4}$ més gruixudes són les parets i més pesada és la construcció.

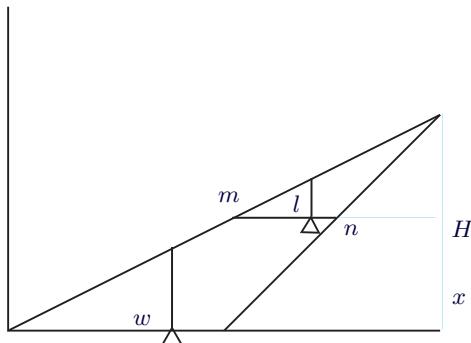
Exemple: Si $9 = 2$; $n = 2m$ i $h \leq \frac{1}{4}l$



És a dir, la volada màxima pot ser $\frac{1}{4}$ de la longitud de la llosa.

Observacions:

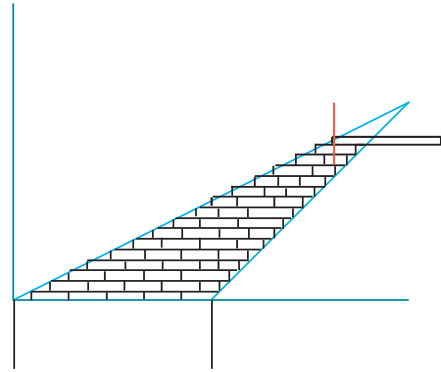
1. A mesura que pugem la volta, ja que g és fix i l va disminuint, la volada màxima que podem fer és cada vegada més petita. Segurament aquesta és una de les causes per les quals es tanquen les falses cúpules amb una llinda.



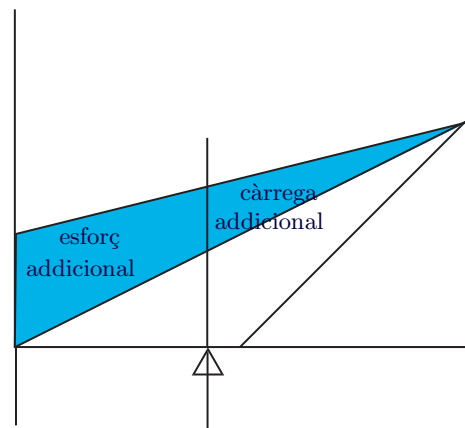
$$\begin{aligned} \frac{H-x}{l} &= \frac{H}{w} \\ l &= \frac{w}{H}(H-x) = w\left(1 - \frac{x}{H}\right) \\ h &\leq l \frac{\lambda-1}{\lambda+2} = w\left(1 - \frac{x}{H}\right) \frac{\frac{R}{r}-1}{\frac{R}{r}+2} = \\ &= (R-r)\left(1 - \frac{x}{H}\right) \frac{R-r}{R+2r} = \\ &= \frac{(R-r)^2}{R+2r} \left(1 - \frac{x}{H}\right) = \frac{w^2}{w+3r} \left(1 - \frac{x}{H}\right). \end{aligned}$$

Aquesta expressió ens dona la volada màxima per a la filada x , la situada a altura x des de l'inici de la volta. Veiem que a mesura que x augmenta, el valor màxim de h disminueix. Tot i amb això, com que si r i H són fixos, la

volada màxima depèn de l'amplada de la paret w i la funció $\frac{w^2}{w+3r}$ és creixent en w , podem augmentar la volada màxima de cada filada, augmentant l'amplada de la paret w . Això explicaria per què, en general, les parets de les barraques de vinya solen ser bastant més amples del que caldria.



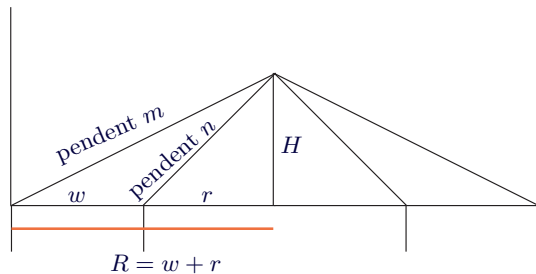
2. La falsa cúpula és una estructura molt més estable del que pot semblar a simple vista. Si a més a més tenim en compte que, a la pràctica, la coberta es recreix amb un contrapés addicional, fent que la paret exterior pugui recta molt més amunt del punt on internament arrenca la volta, aquest sobre esforç la fa encara més estable. Això explicaria, per una banda, que en general les cúpules s'esfondrin a partir del punt on s'iniciava la coberta d'argila exterior —que el temps s'ha endut, i amb ella el contrapés— i que, per altra banda, hagin arribat parcialment fins a nosaltres falses cúpules del període neolític.



3. Radi de la cúpula i lleugeresa.

La pesantor $9 = n/m$ es relaciona amb l'amplada de la paret i el radi de la cúpula:

$$\lambda = \frac{n}{m} = \frac{\frac{H}{r}}{\frac{H}{r+w}} = \frac{r+w}{r}.$$



Per tant, obtenim:

$$\lambda = 1 + \frac{w}{r} = \frac{R}{r}.$$

Si, per exemple, fem $9 = 2$, llavors

$$2 = 1 + \frac{w}{r}; \quad 1 = \frac{w}{r}; \quad r = w.$$

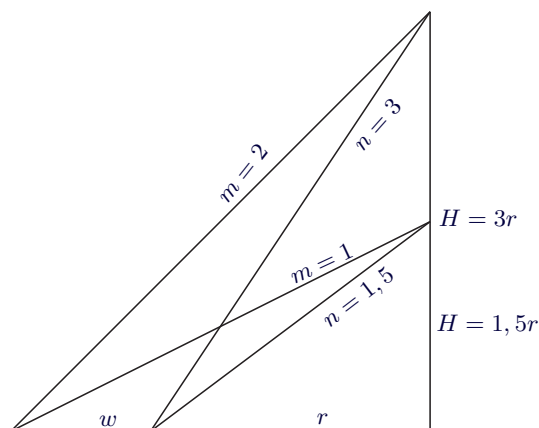
Si, per exemple, volem $r = 2w$, llavors

$$\lambda = 1 + \frac{w}{2w} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{n}{m}; \quad n = \frac{3}{2}m.$$

En aquest cas, la volada màxima és

$$h = l \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2} = \frac{1}{7}l.$$

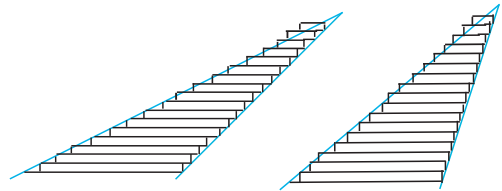
Si fem $m = 2$ i $n = 3$, llavors $H = 3r$. Si fem $m = 1$ i $n = 1,5$, llavors $H = 1,5r$.



Si $r \gg w$, llavors $\frac{w}{r} \rightarrow 0$ i $\lambda \rightarrow 1$. De manera que la volada $h \rightarrow 0$. Llavors per obtenir pendents petits i altures raonables necessitem lloses molt primes. Donat que a la pràctica no n'hi ha o es presenten llavors problemes de resistència a la fractura, per a radis molt grans calen altures molt grans, perquè la cúpula és llavors bastant dreta.

Algunes dades reals

A la pràctica, hi ha, com sempre, una sèrie de condicionants que afecten el model. El més important és el tipus de pedres de què es disposa per construir la volta. Com assenyala el professor Juvanec, habitualment són pedres «normals» de 15 a 30 cm de longitud i de 7 a 20 cm



d'alçada. En realitat, a les barraques que hem estudiat al Bages, les pedres de la volta són lloses de longituds i amplades força més grans. En una hi ha una filada en què una sèrie de lloses, simètricament repartides, travessen la paret de banda a banda i sobresurten per l'exterior, cosa que dóna a la construcció un aspecte estètic notable. En una experiència de reconstrucció real d'una volta, que vam dur a terme amb un barracaire, la pràctica no s'allunyà massa del model que aquí hem exposat. Un altre problema és el dels pendents interior i exterior de la volta. Juvanec afirma que, en totes les barraques que ell ha analitzat, la inclinació interior és de 60° com a mitjana, de manera que la secció forma un triangle equilàter. Com es pot veure a la taula següent, els valors que nosaltres hem obtingut donen una mitjana de $49,54^\circ$ per a la inclinació interior.

Les dades de la taula s'han obtingut d'una sèrie de nou barraques de Súria (Bages). Els càlculs de m i n es fan a partir de les fórmules:

$$n = \frac{h_b - h_i}{r} \quad \text{i} \quad m = \frac{h_b - h_i}{R}$$

on h_b és l'alçada de la barraca des del seu centre fins al punt més alt de la volta, h_i és l'alçada de la paret interior, des de terra fins al punt on arrenca la volta, r és el radi interior de la volta, pres com la meitat del costat interior de la barraca i R és el radi exterior de la volta, pres com la meitat del costat exterior de la barraca.

Pendent interior (n)	Pendent exterior (m)	Inclinació interior (K)	Inclinació exterior (2)	Lleugeresa ($:$)
1,0137	0,6837	45°	34°	0,6745
1,21739	0,8	50,6°	38,6°	0,6611
1,0322	0,74418	46°	36,65°	0,588
1,19	0,7	50°	35°	0,721
0,68/0,9*	0,456/0,5454	34,2°/42°	24,5°/28,6°	0,67/0,61
1,478	0,8	55,92°	38,66°	0,541
2,5	1,538	68,2°	56,976°	0,615
0,871	0,538	41,04°	28,28°	0,586
1,92	1,17	62,488°	49,49°	0,609

L'anàlisi estadística d'aquestes dades ens dona els quadres següents:

Lleugeresa	
Mean	0,62756
Standard Error	0,016818
Median	0,6125
Standard Deviation	0,053183
Sample Variance	0,002828
Kurtosis	-0,31781
Skewness	0,219174
Range	0,18
Minimum	0,541
Maximum	0,721

Inclinació interior	
Mean	49,5448
Standard Error	3,258231
Median	48
Standard Deviation	10,30343
Sample Variance	106,1607
Kurtosis	-0,16919
Skewness	0,523755
Range	34
Minimum	34,2
Maximum	68,2

Notem que la desviació típica de la lleugeresa és molt petita, de forma que, en la nostra mostra, el valor 0,6275 és gairebé un invariant.

Agraïments

Un agraïment especial al professor Borut Juvanec pels seus valuosos comentaris sobre una versió prèvia d'aquest article. També al professor Christian Lassure pels seus comentaris.

Referències

- [1] ALLEN, E. *Stone Shelters*. 5a ed. The MIT Press, 1981.
- [2] ALMAGRO, M.; ARRIBAS, A. *El poblado y la necrópolis megalítics de Los Millares*. Madrid: CSIC, 1963.
- [3] Arxiu de Salipota, *Possible cadastre de Sùria de 1731*. Transcripció d'A. Fàbrega, 2002.
- [4] BADIA, J.; BOFARULL, B., BORRÀS, R., CARRERAS, E., PIÑERO, M. *Llançà a l'època medieval*. Figueres: Edicions El Brau, 1995.
- [5] BASSEGODA, J. «Construcciones rústicas: cómo hacer una barraca de viña». *La Vanguardia*, (18 d'abril de 1976).
- [6] BENCH, J. *Les barraques de pedra en sec d'Altafulla*. Estudis Altafullencs, núm. 3, Centre d'Estudis d'Altafulla, 1979.
- [7] BENVENUTO, E.; CORNADI, M. *La statica delle false volte*. Proceedings of the 1987 first international seminar on dry stone architecture, Schena editore.
- [8] BERGADÀ, E. *Antigues cabanes i altres construccions de pedra col·locada en sec*. Museu Municipal de Molins de Rei, 1986.
- [9] D. A. *Pedra seca*. Butlletí Monogràfic editat pel Cercle d'Investigació i Documentació Medieval de Catalunya, desembre 2000.
- [10] FÀBREGA, A. «La pedra en sec a la vinya de Sùria». Comunicació presentada a la Trobada d'Estudiosos de la Pedra Seca. Manresa: 2002. [Pendent de publicació].
- [11] FERRER, LL. *La vinya al Bages*. Manresa: Centre d'Estudis del Bages, 1998.
- [12] HUÉLAMO, J.-M. *Inventari del patrimoni de Sùria*. Diputació de Barcelona, 2000.
- [13] JUVANEC, B. *Stone Shelters* [en línia] <http://www2.arnes.si/aa/shelters/>. [Consulta 8 d'abril de 2002].

*És una barraca de planta rectangular. El primer valor correspon al costat més llarg

- [14] LASSURE, C. *Essai d'analyse architecturale des édifices en pierre sèche a L'Architecture Rurale en Pierre Sèche*. París: CERAV, suppl. núm. 1, p. 1-27 i 36-60.
- [15] LASSURE, C. *Dating dry stone huts from dates inscribed in stone* [en línia] 10th Alps Adria Conference, 2000. <http://www.pierreseche.com>. [Consulta 8 d'abril de 2002].
- [16] OBEREINER, J.-L. *Eléments pour servir à l'étude statique des voûtes de pierres sèches à encorbellements a L'Architecture Rurale en Pierre Sèche*. París: CERAPS, suppl. núm. 1, p. 28-36.
- [17] PLANS, J. *Construccions de pedra seca a la comarca del Bages; barraques de vinya al terme de Sant Fruitós de Bages*. Manresa: Centre Excursionista de la Comarca del Bages, 1994.
- [18] PLANS, J. *Barraques de vinya* [en línia] <http://personales.com/espana/barcelona/barraquesvinya/index.html> [Consulta 8 d'abril de 2002].
- [19] SIRET, L. «Espania prehistórica». A: Del Neolítico al Bronce. Almeria: Arráez Editores, 1999.
- [20] SOLER, J. M.; PERARNAU, J. «Les barraques de vinya al terme municipal d'Artés (Pla de Bages)». *Dovella*, núm. 17 (1985), p. 37-43.
- [21] SOLER, J. M. *Les barraques de vinya*. Centre d'Estudis del Bages, 1994.
- [22] SOLER, J. M. «La tècnica de la "pedra seca"». *Dovella*, núm. 29 (1988), p. 47-52.
- [23] SOLER, J. M. «La construcció en "pedra seca"». *Dovella*, núm. 70 (2000), p. 9-11.
- [24] TIRET, A. «Stabilité des coupoles en pierres sèches édifiées sans cintre». *Archéam* núm. 7 1999-2000, p. 34-48.
- [25] VILA, J. M. «Arqueologia a Síria. Darreres intervencions». *Dovella* núm. 67 (2000), p. 19-25.
- [26] VIOLANT I SIMORRA, R. *Las "barraques" de viña, de paret en seco, del Pla de Bages*. Obra Oberta, 4. Altafulla, 1981, p. 269-282.

Albert Fàbrega
IES Mig-Món de Síria i UPC

Escaire i cartabó

Tant a les classes de matemàtiques com a les de tecnologia o visual i plàstica, s'utilitza l'escaire i el cartabó com a instruments de dibuix. Però quin és quin? Sorpren la varietat de definicions que han rebut ambdós instruments.

En català, al diccionari Fabra (DFa) es defineix *escaire* com a «triangle rectangle» i *cartabó* com a «triangle rectangle isòsceles». Actualment, al diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans (DIEC, 1995) es defineix *escaire* i *cartabó* de la mateixa manera: «Instrument de dibuix en forma de triangle rectangle isòsceles». Aleshores, com hem d'anomenar el que té angles de 30°, 60° i 90°? En la segona edició del DIEC caldrà precisar-ho. Si consultem altres diccio-

naris veurem que segons l'any hi ha matisos importants que, especialment en castellà, han dut a alguns a capgirar les definicions originals. A l'IEC es planteja canviar les definicions de tal manera que l'escaire sigui isòsceles i el cartabó tingui angles de 30°, 60° i 90°. És a dir, a l'inrevés que Fabra. La polèmica està servida. S'han de canviar les definicions del DFa? Hi ha diferents possibilitats: «Instrument [de dibuix / de fuster /...] en forma de [L / triangle / triangle rectangle / triangle rectangle isòsceles / triangle rectangle escalè /...] que serveix per a traçar línies perpendiculars, paral·leles, angles de [30° i 60° / 45°]...» Analitzem-ho: